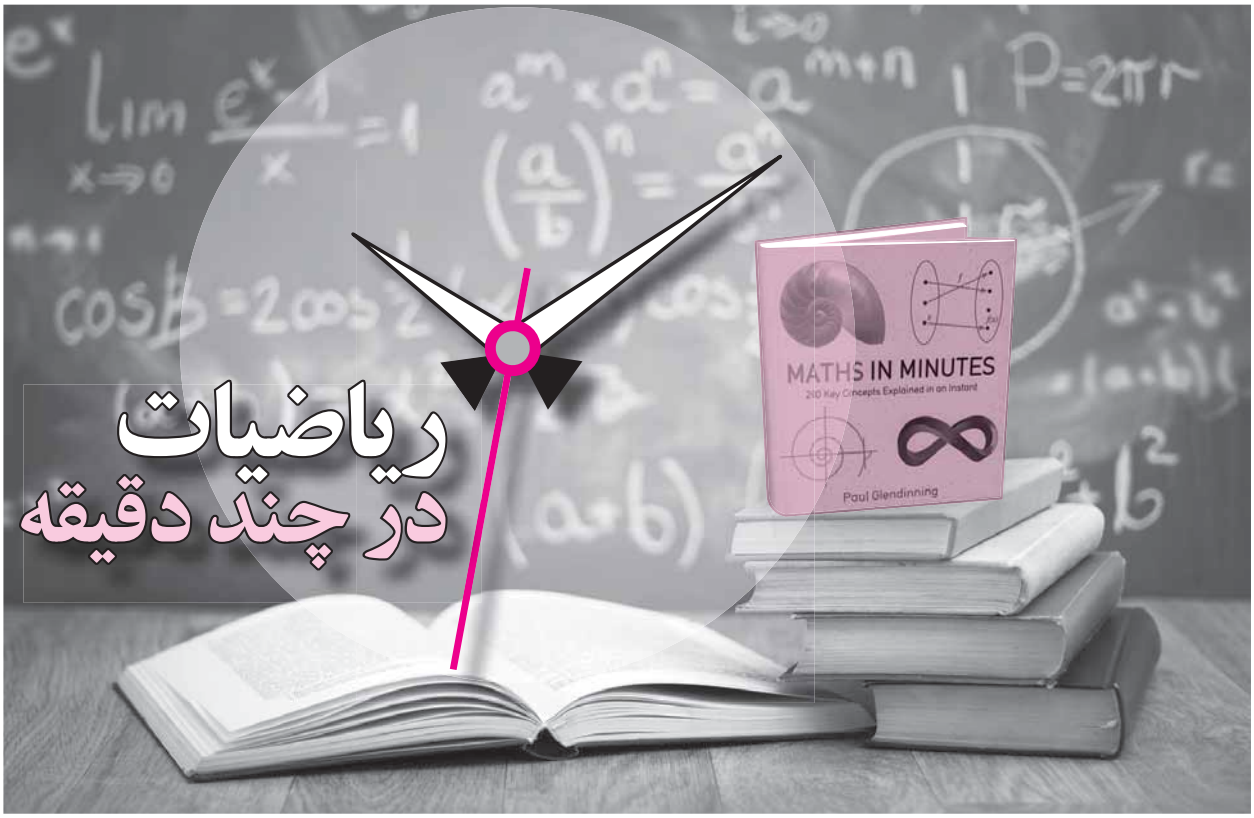
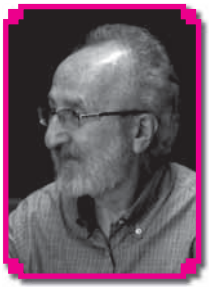
پال گِلندینینگ



ریاضیات در چند دقیقه



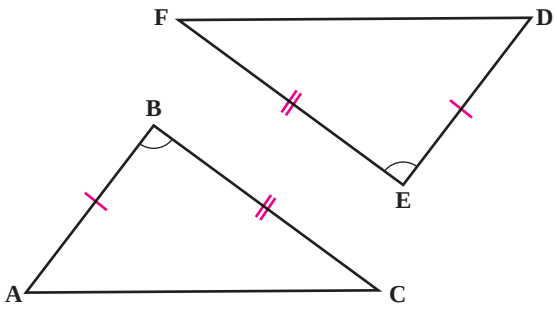
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

هم‌نهشتی

دو شیء را «هم‌نهشت» (congruent) می‌گویند اگر یک‌شکل و یک‌اندازه باشند. بنابراین دو مثلث هم‌نهشت‌اند اگر مشابه ـ یک شکل ـ باشند و طول اضلاع متناظرشان برابر یا یک اندازه باشد. یعنی عامل مقیاس‌بندی بین آن‌ها ۱ باشد.

توجه داشته باشید که هم‌نهشتی لزوماً به این معنی نیست که می‌توان یک مثلث را صرفاً توسط تبدیلات واقع در صفحه، طوری روی دیگری حرکت داد که کاملاً برهم منطبق شوند. دو مثلث هم‌نهشت می‌توانند تصویرهای آینه‌ای یکدیگر باشند و تنها به‌طور فیزیکی با برداشتن کامل یکی از آن‌ها به خارج از صفحه، می‌توانند برهم منطبق شوند.

دو مثلث در حالت کلی هم‌نهشت‌اند، اگر هر یک از سه مجموعهٔ این مقدارها در هر دو یکسان باشند: طول‌های سه ضلع؛ طول‌های دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها؛ یا طول یک ضلع و زاویه‌های تشکیل شده با اضلاع دیگر دو طرف آن. به این ترتیب هر یک از این سه معیار برای مشخص کردن یک مثلث کافی است.



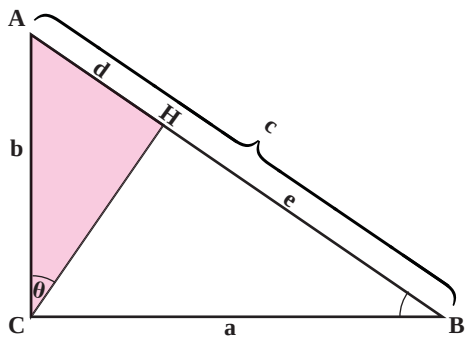
یک جفت مثلث هم‌نهشت را می‌توان با استفاده از آزمون‌هایی، از قبیل دانستن دست کم دو ضلع برابر و یک زاویهٔ برابر مطابق شکل فوق شناخت. با این حال، این دو مثلث هم‌نهشت نمی‌توانند روی یکدیگر قرار گیرند.

قضیهٔ فیثاغورس

گرچه این قضیه از اواخر قرن ششـــم ق.م. به نام فیثاغورس (Pythagras)، ریاضی‌دان یونانی، نامیده شده اســـت، این ارتباط مشهور بین طول‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، با یقین بسیار، قرن‌ها پیش از این نزد بابلی‌ها شناخته شده بوده است.

طبق این قضیه، مربع بزرگ‌ترین ضلع، که به نام وتر شناخته می‌شود، برابر مجموع مربعات طول‌های دو ضلع دیگر آن اســـت. اثبات ســـادهٔ آن مبتنی بر نسبت‌های اضلاع مثلث‌های متشابه را در شکل مقابل نشـــان داده‌ایم، اما آن را می‌توان بـــا در نظر گرفتن سطوح مربع‌های هندسی ســـاخته شده بر هر ضلع مثلث نیز به اثبات رساند.

قضیهٔ فیثاغورس یکی از ابزارهای مهم هندســـه است، و بسیاری از تعاریف فاصله در هندسهٔ مختصاتی مبتنی بر این رابطه‌اند. این قضیه را می‌توان برحسب رابطهٔ بین توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس نیز بیان کرد.



تشـــابه مثلث‌های ABC و CHB از یک طرف، و ABC و ACH از طرف دیگر، مستلزم این است که:

$$\frac{a}{c}=\frac{e}{a} \quad \text{و} \quad \frac{b}{c}=\frac{d}{b}$$

در نتیجه: $a^2=ec$ و $b^2=dc$ و داریم:

$$a^2+b^2=(e+d)c=c^2$$

سینوس، کسینوس و تانژانت

مثلث‌هـــای قائم‌الزاویه این امکان را به‌دســـت می‌دهند که توابع را با زاویه‌ها، از طریق نسبت‌های طول‌های اضلاع آن‌ها، وابسته کنیم. این‌ها به «*توابع مثلثاتی*» (trigonometric functions) موسوم‌اند، و توابع اساسی تعریف شده به این طریق عبارت‌اند از توابع «سینوس» (sine)، «کسینوس» (cosine) و «تانژانت» (tangent).

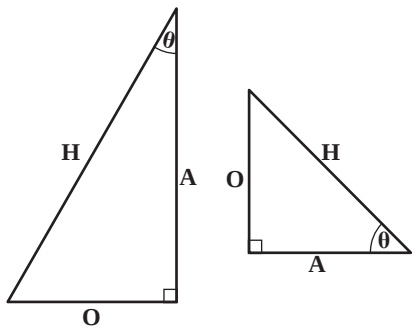
برای تعریـــف این توابـــع، یکـــی از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه، به‌نام θ را که ۹۰° نباشد، انتخاب می‌کنیم. این زاویه از برخورد وتر مثلث به‌طول H، و ضلع دیگر، موســـوم به ضلع مجـــاور، به طول A تشکیل می‌شود. ضلع باقی‌مانده، مقابل زاویهٔ مزبور، دارای طول O است. در این صورت، توابع سینوس، کسینوس و تانژانت توســـط نسبت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin\theta=\frac{O}{H} \quad \text{و} \quad \cos\theta=\frac{A}{H} \quad \text{و} \quad \tan\theta=\frac{O}{A}$$

از آنجـــا که دو مثلـــث قائم‌الزاویه بـــا زاویهٔ θ متشابه یکدیگرند، توابع مذکور، بی‌توجه به اندازهٔ مثلث، به پاســـخ یکسان منجر می‌شوند. گذشته از این، از آنجا که:

$$\frac{O}{A}=\frac{O}{H}\Big/\frac{A}{H}$$

می‌توان ملاحظه کرد که: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.



در حالی‌که وتر یک مثلث قائم‌الزاویه همواره بزرگ‌ترین ضلع اســـت، اضلاع مقابل و مجاور آن در رابطه با زاویهٔ مورد بررسی تعریف می‌شوند.